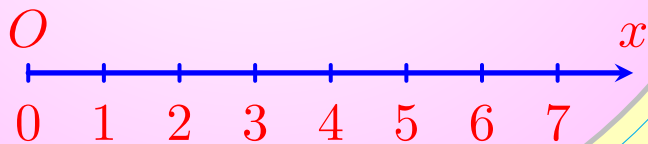
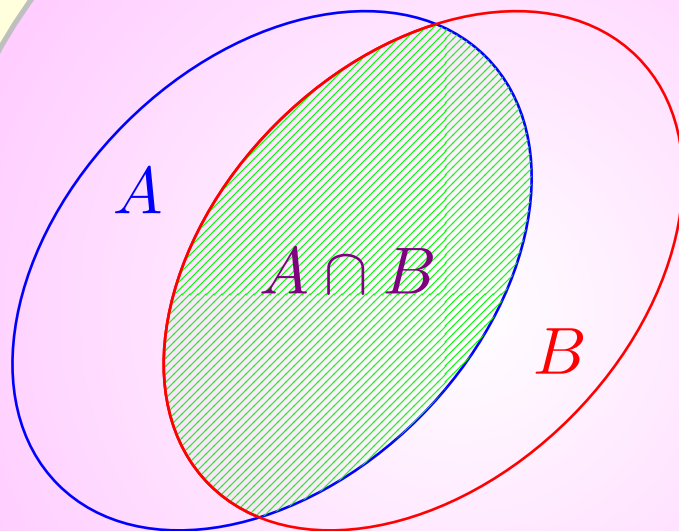
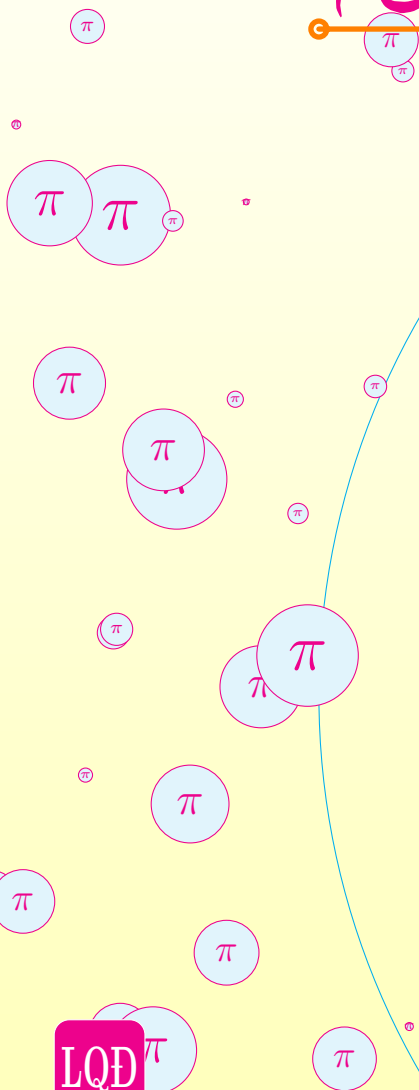


# Toán 9

TĐ chuyên Toán

TÀI LIỆU DẠY ÔN THI



# MỤC LỤC

## I ĐỀ TS VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN CÁC TỈNH - NĂM 2022

§1 –	CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - TỈNH NINH THUẬN	2
§2 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH ĐỒNG THÁP	4
§3 –	CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - TỈNH KHÁNH HÒA	6
§4 –	TS CHUYÊN TOÁN - KHTN - V2	8
§5 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH THỪA THIÊN HUẾ	10
§6 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH AN GIANG	12
§7 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH BẮC GIANG	14
§8 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH BẮC NINH	17
§9 –	TS CHUYÊN TOÁN - BÀ RIA VŨNG TÀU	19
§10 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH BẾN TRE	20
§11 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH BÌNH PHƯỚC	22
§12 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH BÌNH THUẬN	24
§13 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH CẦN THƠ	26
§14 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH ĐÀK NÔNG	28
§15 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH QUẢNG NINH	30
§16 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH HẢI PHÒNG	32
§17 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH BÌNH DƯƠNG	34
§18 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH KIÊN GIANG	36
§19 –	TS CHUYÊN TOÁN - KHTN - V2	39
§20 –	TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH LÂM ĐỒNG	41

§21 – TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH THANH HÓA	43
§22 – TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH NAM ĐỊNH	45
§23 – TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH VŨNG TÀU	48
§24 – TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH NAM ĐỊNH	50
§25 – TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH QUẢNG TRỊ	53
§26 – TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH NINH BÌNH	55
§27 – TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH HẢI DƯƠNG	57
§28 – TS CHUYÊN TOÁN - PTNK - V2	60
§29 – TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH PHÚ YÊN	62
§30 – TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH NGHỆ AN	64
§31 – TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH QUẢNG BÌNH	66
§32 – TS CHUYÊN TOÁN - SPHN - V1	68
§33 – TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH VĨNH PHÚC	70
§34 – TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH TIỀN GIANG	72
§35 – TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH LÀO CAI	74





PHẦN

# ĐỀ TS VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐÁN CÁC TỈNH - NĂM 2022

# BÀI 1. CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - TỈNH NINH THUẬN

**Câu 1.** (2 điểm)

Rút gọn biểu thức  $P = \left( \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} - \frac{1}{a} \right) \left( \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2} - 1 + a} + \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} \right)$  với  $0 < a < 1$ .

**Câu 2.** (1,5 điểm)

Hai người cùng làm chung một công việc sau 6 ngày thì xong. Nếu người thứ nhất làm riêng trong 2 ngày rồi dừng lại và người thứ 2 làm tiếp công việc đó trong 3 ngày thì cả hai người hoàn thành được 40% công việc. Hỏi nếu mỗi người làm riêng thì trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên?

**Câu 3.** (2 điểm)

- Cho phương trình  $x^2 - 5x + 3m + 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1^2 - x_2^2| = 15$ .
- Cho  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng  $p^2 - 1$  chia hết cho 24.

**Câu 4.** (3,5 điểm)

Cho tam giác  $ABC$  không là tam giác cân, biết tam giác  $ABC$  ngoại tiếp đường tròn  $(I)$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là các tiếp điểm của  $BC, CA, AB$  với đường tròn  $(I)$ . Gọi  $M$  là giao điểm của đường thẳng  $EF$  và đường thẳng  $BC$ , biết  $AD$  cắt đường tròn  $(I)$  tại điểm  $N$  ( $N$  không trùng với  $D$ ), gọi  $K$  là giao điểm của  $AI$  và  $EF$ .

- Chứng minh rằng các điểm  $I, D, N, K$  cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh  $MN$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(I)$ .

**Câu 5.** (1,0 điểm)

Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 3} + 2y - 3 = 0 \\ 2x^3 + 3x^2y + 4y^3 + 6x^2 + 6xy + 6x + 3y + 2 = 0. \end{cases}$$



## BÀI 2. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH ĐỒNG THÁP

**Câu 1.** (2,0 điểm) Cho biểu thức  $T = \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) \left( \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right)$  (với  $x > 0, x \neq 1$ ).

- a) Rút gọn biểu thức  $T$ .
- b) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $3T - 2 = 0$ .

**Câu 2.** (1,0 điểm) Giải phương trình  $\sqrt{2x-1} = 3-2x$ .

**Câu 3.** (1,0 điểm) Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 4$  dm,  $AB = 2AD$ . Đường thẳng  $d$  vuông góc với  $AC$  tại  $C$ , đường thẳng  $d$  cắt hai đường thẳng  $AB, BD$  lần lượt tại  $E$  và  $I$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $BD, BE$  và  $ID$ .

**Câu 4.** (1,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d): y = (m+1)x + 1$  ( $m$  là tham số). Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P): y = x^2$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là  $x_1, x_2$  (với  $x_1 < x_2$ ) sao cho  $|x_1| > |x_2|$ .



**Câu 5.** (1,0 điểm) Do ảnh hưởng của đại dịch COVID–19, trong một đợt kiểm tra thường xuyên môn Toán, giáo viên đã chia lớp thành 3 nhóm, mỗi học sinh chỉ được chọn một trong 3 nhóm:  
 Nhóm A: Kiểm tra trực tiếp tại lớp với hình thức tự luận.  
 Nhóm B: Kiểm tra trực tuyến với hình thức trắc nghiệm.  
 Nhóm C: Làm bài thu hoạch cá nhân theo chuyên đề đã học.  
 Sau khi kiểm tra, điểm trung bình của các em học sinh được thống kê theo bảng sau:

Nhóm	A	B	C	A và B	B và C
Điểm trung bình	9,0	8,0	8,5	8,4	8,2

Biết nhóm A có 10 học sinh lựa chọn. Tính số học sinh và điểm trung bình của lớp đó trong đợt kiểm tra thường xuyên trên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Câu 6.** (1,0 điểm) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + xy + 1 = 2x + y \\ \sqrt{3x+1} - 2\sqrt{1-y} = y. \end{cases}$$

**Câu 7.** (3,0 điểm) Cho tam giác  $ABC$  nhọn với  $AB < AC$ . Ba đường cao  $AD, BE, CQ$  cắt nhau tại  $H$  (với  $D \in BC, E \in AC, Q \in AB$ ). Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $T$  là giao của  $EQ$  với  $BC$ .

- Chứng minh  $AEDB$  là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh tứ giác  $EQDM$  nội tiếp và  $TD \cdot TM = TB \cdot TC$ .
- Chứng minh  $H$  là trực tâm của tam giác  $ATM$ .

## BÀI 3. CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - TỈNH KHÁNH HÒA

### Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sqrt{6\sqrt{6-4\sqrt{2}}-1}}{3-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$ .

b) Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa  $2a^2 - 3ab + 2b^2 = 1$ ;  $b^2 - 3bc + 4c^2 = 2$  và  $c^2 + 3ca - a^2 = 3$ . Tính giá trị của biểu thức  $B = a^4 + b^4 + c^4$ .

### Câu 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường thẳng  $d: y = mx + m + 1$  ( $m$  là tham số). Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để  $d$  cắt trục hoành tại điểm  $A$ , trục tung tại điểm  $B$  và tạo thành tam giác  $OAB$  có diện tích bằng 2 ( $O$  là gốc tọa độ).

b) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x^3 - 6x^2y + 5xy^2 - 2y^3 = 0 \\ \frac{1}{x^2 - 12y + 4} - \frac{1}{x^2 - 4y + 4} = \frac{1}{30y} \end{cases}$$

### Câu 3.

a) Chứng minh  $2x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$  với mọi số thực  $x \geq 0$ .

b) Cho các số thực không âm  $x, y, z$  thỏa  $\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+y^3} + \frac{1}{1+z^3} = \frac{3}{2}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $Q = \frac{1-x}{1-x+x^2} + \frac{1-y}{1-y+y^2} + \frac{1-z}{1-z+z^2} + 2022$ .

**Câu 4.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  không cân đỉnh  $C$  nội tiếp trong đường tròn  $(O)$ . Gọi  $d_1$  và  $d_2$  tương ứng là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $A$  và  $B$ , các tiếp tuyến này cắt nhau tại  $D$ . Gọi  $E$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  lên đường thẳng  $DC$ .

- Chứng minh năm điểm  $A, O, E, B, D$  cùng thuộc một đường tròn.
- Một đường thẳng  $d$  qua  $C$  và song song với  $AB$  cắt  $d_1$  tại  $F$ . Chứng minh tam giác  $DAC$  đồng dạng với tam giác  $DEF$ .
- Gọi  $K$  là trung điểm của  $AC$ . Chứng minh ba điểm  $E, K$  và  $F$  thẳng hàng.

**Câu 5.**

- Bên trong một tam giác đều cạnh bằng 4 cho năm điểm. Chứng minh rằng trong năm điểm đó có hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2.
- Cho các số tự nhiên  $a, b, c$  thỏa  $2a^2 + 3b^3 = 4c^4$ . Chứng minh  $a, b, c$  đều chia hết cho 6.
- Một tập hợp  $S$  được gọi là có tính chất  $T$  nếu  $S$  có đúng bốn phần tử và với mọi phần tử  $x$  của  $S$  thì ít nhất một trong hai phần tử  $x - 1$  hoặc  $x + 1$  thuộc  $S$ . Cho tập hợp  $X = \{1; 2; 3; \dots; 2022\}$ . Tính số tất cả các tập con có tính chất  $T$  (nêu trên) của tập  $X$ .

— HẾT —

## BÀI 4. TS CHUYÊN TOÁN - KHTN - V2

**Câu 1 (2,0 điểm).** Cho biểu thức  $P(x) = \left( \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \frac{4x}{4-x} \right) : \frac{x+5\sqrt{x}+6}{x-4}$ , ( $x \in \mathbb{R}$ ).

- a) Tìm điều kiện của  $x$  để  $P(x)$  có nghĩa và rút gọn biểu thức  $P(x)$ .  
 b) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $P(x) \leq 3$ .

**Câu 2 (2,0 điểm).**

a) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + \frac{2}{y} = 3 \\ y + \frac{2}{x} = 3. \end{cases}$$

b) Giải phương trình 
$$\frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+8x+15} = \frac{1}{6}.$$

**Câu 3 (2,0 điểm).** Cho phương trình  $x^2 + (m^2 + 5)x - 1 = 0$  với  $m$  là tham số thực.

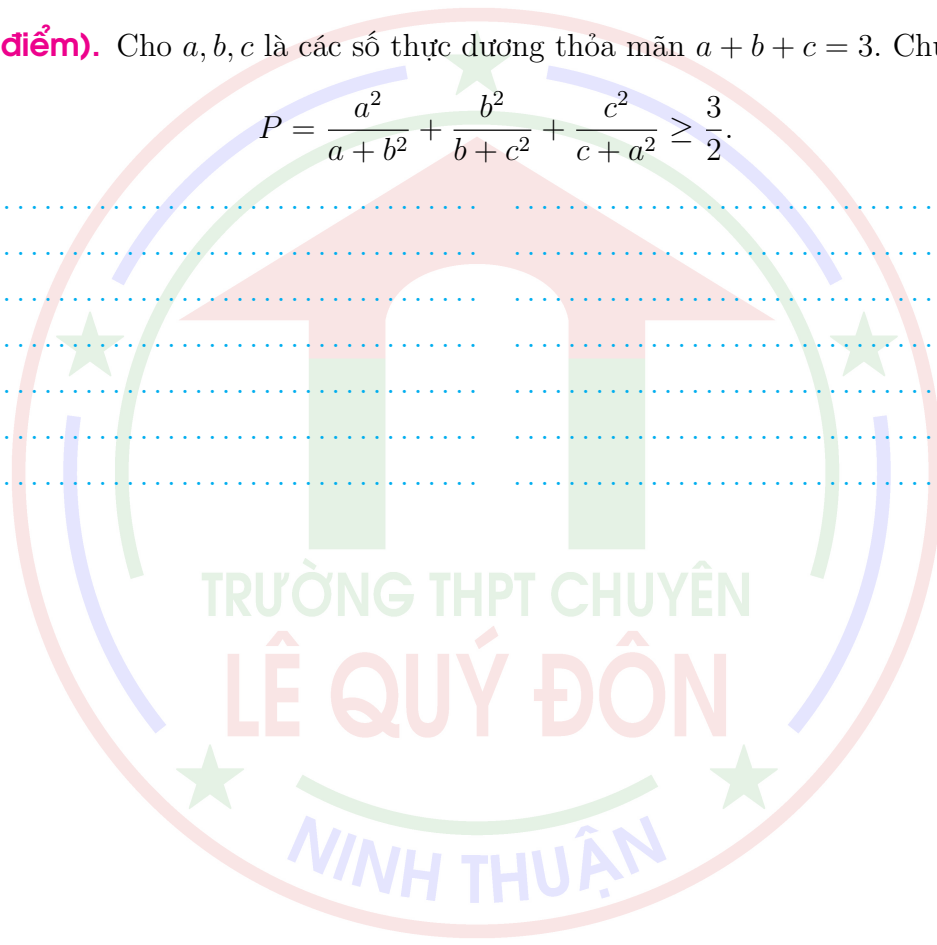
- a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m \in \mathbb{R}$ .  
 Tính giá trị của biểu thức  $F = x_1^3 + x_2^3$  theo  $m$ .  
 b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để  $F$  chia hết cho 3.

**Câu 4 (3,0 điểm).** Cho đường tròn  $(O)$  có hai đường kính  $AB$  và  $CD$  vuông góc với nhau, điểm  $E$  thuộc cung nhỏ  $\widehat{BC}$  ( $E$  khác  $B$  và  $C$ ). Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường thẳng  $AE$  và  $BC$ ,  $H$  là giao điểm của hai đường thẳng  $DE$  và  $AB$ . Chứng minh rằng:

- a)  $AE$  là đường phân giác của góc  $\widehat{DEC}$ .
- b) Tứ giác  $IHBE$  nội tiếp đường tròn.
- c)  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $CEH$ .

**Câu 5 (1,0 điểm).** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$



## BÀI 5. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH THỪA THIÊN HUẾ

**Câu 1 (1,5 điểm).** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right) (x\sqrt{x} - \sqrt{x})$  với  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$ .

- Rút gọn biểu thức  $A$ .
- Tìm tất cả các số nguyên  $x$  sao cho biểu thức  $A$  nhận giá trị là số nguyên.

**Câu 2 (1,5 điểm).**

- Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P) : y = x^2$  và đường thẳng  $(d) : y = kx + 2$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $(d)$  và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của  $k$  để đường thẳng  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  thỏa mãn  $x_1 < x_2$  và  $IA = 2IB$ .

- Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^3 - xy^2 - (x - y + 1)(x + y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$
.

**Câu 3 (2,0 điểm).**

- Tìm  $m$  để phương trình  $3x^2 + 4(m - 1)x - m^2 - 4m - 5 = 0$  ( $x$  là ẩn số) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  sao cho biểu thức  $P = \frac{x_1^3}{x_2^3} + \frac{x_2^3}{x_1^3}$  đạt giá trị lớn nhất.
- Giải phương trình  $(x^2 + 6)\sqrt{x^2 + 6x + 12} - (3x^2 + 10x + 28)\sqrt{x + 1} = 0$ .

**Câu 4 (3,0 điểm).** Cho đường tròn  $(O)$  và dây  $BC$  cố định không đi qua  $O$ . Điểm  $A$  thay đổi trên cung lớn  $BC$  sao cho  $ABC$  là tam giác nhọn và  $AB < AC$ . Gọi  $AD, BE, CF$  là các đường cao và  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Gọi  $K$  là giao điểm của hai đường thẳng  $BC$  và  $EF$ ;  $I$  là giao điểm thứ hai của  $KA$  với  $(O)$ ;  $M$  là trung điểm  $BC$ ;  $N$  là giao điểm thứ hai của  $AH$  và  $(O)$ . Chứng minh:

- Tứ giác  $AIFE$  là tứ giác nội tiếp;
- Ba điểm  $M, H, I$  thẳng hàng;
- Tứ giác  $INMO$  là tứ giác nội tiếp;
- Đường thẳng  $IN$  luôn đi qua một điểm cố định khi  $A$  thay đổi.

**Câu 5 (2,0 điểm).**

- Tìm tất cả các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $x^3 - x^2(y + 1) + x(7 + y) - 4 - y = 0$ .
- Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $xy + yz + zx = 3$ . Chứng minh:

$$\frac{x}{x^2 + 15} + \frac{y}{y^2 + 15} + \frac{z}{z^2 + 15} \leq \frac{3 + x + y + z}{32}.$$

## BÀI 6. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH AN GIANG

**Câu 1.** Cho  $A = (4 + x + 2\sqrt{3+x})^2 - 10(1 + \sqrt{3+x})^2$ .

- Tính giá trị biểu thức  $A$  khi  $x = 2\sqrt{2}$ .
- Tìm  $x$  biết  $A = -9$ .

**Câu 2.** Cho parabol  $(P): y = -2x^2$  và hai điểm  $A(-1; 0)$ ,  $B(1; -2)$ .

- Vẽ đồ thị  $(P)$  và hai điểm  $A, B$  trên cùng hệ trục tọa độ  $Oxy$ .
- Viết phương trình đường thẳng  $(d)$  song song với  $AB$  và tiếp xúc với  $(P)$ .

**Câu 3.** Cho phương trình bậc hai ẩn  $x$ ,  $n$  là tham số  $nx^2 - 2(n+1)x + n = 0$ .

- Tìm  $n$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ .
- Chứng minh rằng  $|x_1 - x_2| \leq 2\sqrt{3}$  với mọi số  $n$  nguyên dương.

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ , ( $AC > BC$ ),  $BC = 2$ . Biết rằng đường tròn  $(O)$  qua ba điểm  $A, B, M$  ( $M$  là trung điểm của  $BC$ ) cắt  $AC$  tại  $L$  với  $BL$  là tia phân giác của góc  $\widehat{ABC}$ .

- Chứng minh  $CA \cdot CL = 2$ .
- Chứng minh  $AB \cdot LC = BC \cdot LM$ .
- Tính độ dài cạnh  $AB$ .



.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Câu 5.** Một nông dân thu hoạch 100 trái dưa lưới có khối lượng trung bình là 1,5 kg. Trong 100 trái này có các trái dưa lưới nặng hơn 1,5 kg có khối lượng trung bình là 1,73 kg, các trái dưa lưới nhẹ hơn 1,5 kg có khối lượng trung bình là 1,33 kg và các trái dưa lưới nặng đúng 1,5 kg.

- a) Tìm biểu thức liên hệ giữa số trái dưa lưới theo khối lượng của chúng.
- b) Có ít nhất bao nhiêu trái dưa lưới nặng đúng 1,5 kg?

.....  
.....  
.....  
.....  
.....



## BÀI 7. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH BẮC GIANG

**Câu 1.** (3,0 điểm) Cho biểu thức  $A = \left( \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3} + \frac{6}{\sqrt{x} + 3} - \frac{36}{9 - x} \right) : \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x - 4\sqrt{x} + 3}$  với  $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$ .

a) Rút gọn biểu thức  $A$ .

b) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $A \geq 4$ .

**Câu 2.** (2,0 điểm) Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^3 - (2m + 1)x^2 + (m^2 + 2m - 1)x - m^2 + m = 0$  có ba nghiệm phân biệt  $x_1, x_2, x_3$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3 = 0$ .

**Câu 3.** (2,0 điểm) Cho đa thức  $P(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 8x + 1$  và số  $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$ . Tính  $P(a)$ .

**Câu 4.** (2,0 điểm) Giải phương trình  $x^2 + 3x - 1 + 2\sqrt{(x^3 + x + 5)^2} = 5\sqrt{x^3 + x + 5}$ .

**Câu 5.** (2,0 điểm) Tìm ba số nguyên  $x; y; z$  thỏa mãn  $x^4 + 9y^2 + 25z^2 = x^2 + 6xy + 2022$ .

**Câu 6.** (2,0 điểm) Cho chín số nguyên dương  $a_1; a_2; \dots; a_9$  đều không có ước số nguyên tố nào khác 3; 5 và 7. Chứng minh rằng trong chín số đã cho luôn tồn tại hai số mà tích của hai số này là một số chính phương.

**Câu 7.** (6,0 điểm) Cho nửa đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Gọi  $M$  là một điểm thuộc nửa đường tròn đã cho,  $H$  là hình chiếu của  $M$  trên  $AB$ . Đường thẳng qua  $O$  và song song với  $MA$  cắt tiếp tuyến tại  $B$  của nửa đường tròn  $(O)$  tại điểm  $K$ .

- Chứng minh bốn điểm  $O, B, K, M$  cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi  $C, D$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  trên các đường thẳng  $MA$  và  $MB$ . Chứng minh ba đường thẳng  $CD, MH, AK$  đồng quy.
- Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AH$  và  $BH$ . Xác định vị trí của điểm  $M$  để diện tích tứ giác  $CDFE$  đạt giá trị lớn nhất.

**Câu 8.** (1,0 điểm) Cho ba số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3.$$

.....

.....

.....



## BÀI 8. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH BẮC NINH

### Câu 1.

- 1) Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(2; -3)$  và  $B(7; 7)$ . Tìm điểm  $M$  thuộc trục  $Ox$  để ba điểm  $M, A, B$  thẳng hàng.
- 2) Cho  $a$  là nghiệm của phương trình  $6x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$ . Tính giá trị của biểu thức

$$T = 12a^4 - a^2 + 2a$$

### Câu 2.

- 1) Giải phương trình  $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2 + 3x - 10}) = 7$ .

- 2) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 11 \\ xyz = 6 \end{cases}$$

### Câu 3.

- 1) Tìm tất cả nghiệm nguyên  $(x; y; z)$  của phương trình  $x(x^2 + x + 1) = z^y - 1$  thỏa mãn  $x, y$  là các số nguyên và  $z$  là số nguyên tố.
- 2) Tìm các số thực  $x$  sao cho  $x + \sqrt{2022}$  và  $\frac{3}{x} - \sqrt{2022}$  đều là số nguyên.

**Câu 4.**

1) Cho đường tròn  $(O)$  có đường kính  $AB$ . Lấy điểm  $C$  thuộc đoạn  $AO$  ( $C$  khác  $A, O$ ). Vẽ đường tròn  $(I)$  đường kính  $BC$ . Vẽ tiếp tuyến  $AD$  và cát tuyến  $AEF$  với đường tròn  $(I)$  ( $E$  nằm giữa  $A$  và  $F$ ) sao cho tia  $AO$  nằm giữa hai tia  $AD$  và  $AE$ . Đường thẳng vuông góc với  $AB$  vẽ từ  $C$  cắt đường tròn  $(O)$  tại hai điểm, gọi một trong hai điểm đó là  $N$  sao cho  $N$  và  $D$  thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ  $AB$ . Gọi  $S$  là giao điểm của hai đường thẳng  $DI$  và  $NB$ . Gọi  $R$  là giao điểm của hai đường thẳng  $DN$  và  $AS$ . Gọi  $J$  là trung điểm của  $SD$ .

a) Chứng minh  $\triangle AND$  cân.

b) Gọi  $L, T$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle SBC$  và  $\triangle SEF$ . Chứng minh rằng ba điểm  $J, L, T$  thẳng hàng.

2) Cho hình vuông  $ABCD$  có diện tích  $S$ . Tứ giác  $MNPQ$  có bốn đỉnh  $M, N, P, Q$  lần lượt thuộc các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  của hình vuông đã cho và không trùng với bốn đỉnh của hình vuông. Chứng minh  $S \leq AC \cdot \frac{MN + NP + PQ + QM}{4}$ .

**Câu 5.**

a) Cho  $x, y, z$  là các số thực không âm thỏa mãn  $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3}{3y+1} + \frac{y^3}{3z+1} + \frac{z^3}{3x+1}.$$

b) Có 10 bạn học sinh tham gia thi đấu bóng bàn. Hai bạn bất kì đều phải đấu với nhau một trận, bạn nào cũng phải gặp 9 đối thủ của mình và không có trận đấu hòa. Chứng minh rằng có thể xếp 10 bạn này thành một hàng dọc sao cho bạn đứng trước thắng bạn đứng kề sau.

## BÀI 9. TS CHUYÊN TOÁN - BÀ RIA VŨNG TÀU

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  có đường tròn nội tiếp  $(I)$  tiếp xúc với ba cạnh  $BC, CA, AB$  lần lượt tại các điểm  $D, E, F$ . Gọi  $K$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  trên đường thẳng  $DE$ ,  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $DF$ .

- Chứng minh rằng hai tam giác  $BKM$  và  $DEF$  đồng dạng.
- Gọi  $L$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  trên đường thẳng  $DF$ ,  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $DE$ . Chứng minh rằng hai đường thẳng  $MK$  và  $NL$  song song.
- Gọi  $J, X$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $KL, ID$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $JX$  vuông góc với  $EF$ .

9H3K3 True -Lớp 9 -Môn: Hình học -Chương 3: Góc với đường tròn -Mức độ: Khá -Bài 3: Góc nội tiếp -Dạng: Không rõ

TRƯỜNG THPT CHUYÊN  
LÊ QUÝ ĐÔN  
NHỊNH THUẬN

# BÀI 10. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH BẾN TRE

## Câu 1.

- a) Cho hàm số  $y = ax^2 (a \neq 0)$  có đồ thị  $(P)$ . Tìm  $a$  để  $(P)$  đi qua điểm  $I(\sqrt{3}; 9)$ .
- b) Cho hai đường thẳng  $(d_1) : y = (m - 3)x + 2m^2 - m$  và  $(d_2) : y = 1 - 2x$ , với  $m$  là tham số. Tìm  $m$  để  $(d_1)$  cắt  $(d_2)$  và  $(d_1)$  đi qua điểm  $M(4; -7)$ .
- c) Rút gọn biểu thức  $T = \left[ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{9}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)} \right] \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + 3}$  với  $x > 0, x \neq 9$ .

- Câu 2.** Cho phương trình bậc hai  $3x^2 - 2x + 5 - 2m = 0$ , với  $m$  là tham số. Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng  $\frac{1}{2}$ .

- Câu 3.** Giải phương trình  $\sqrt{3x + 2} - 3\sqrt{2 - x} - 3x + 4 = 0$ . (1)

- Câu 4.** Tìm tất cả nghiệm nguyên của phương trình  $(2x - y + 3)^2 = 3(x - 3y - y^2 + 2)$ .



Câu 5. Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 37 \\ 4x^2 - 3y^2 = 16x - 9y. \end{cases}$$

Câu 6. Cho ba số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $16x + 7y + 13z = 15$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \frac{2xy}{2x+y} + \frac{3yz}{2y+z} + \frac{7zx}{2z+x}$ .

Câu 7. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường phân giác  $AD$  ( $D$  thuộc  $BC$ ) và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Qua  $D$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BC$  và cắt hai đường thẳng  $AC, AB$  lần lượt tại  $E, F$ .

- Chứng minh tứ giác  $ADCF$  nội tiếp một đường tròn.
- Gọi  $I$  là trung điểm  $CF$ . Chứng minh tam giác  $CDF$  là tam giác vuông cân và  $DI \parallel BE$ .
- Cho diện tích tam giác  $BCF$  bằng  $(9 - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ . Tính độ dài  $AB$ .

# BÀI 11. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH BÌNH PHƯỚC

**Câu 1.** Cho biểu thức  $P = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$  với  $x > 0$ ;  $x \neq 1$ .

- a) Rút gọn biểu thức  $P$ .  
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$ .

**Câu 2.** Cho phương trình  $(x-1)(x^2-2x+m)=0$  (1) với  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt thỏa mãn  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{3}$ .

**Câu 3.** Giải phương trình  $(x-1)(x-3)+6=4\sqrt{x^2-4x+6}$ .

**Câu 4.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 10x - 12y^2 - 12y + 9 = 0 & (1) \\ \sqrt{3y-2} - \sqrt{\frac{x+5}{3}} = xy - 2y - 2. & (2) \end{cases}$$

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$ . Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ ,  $M$  là điểm bất kì trên cung nhỏ  $BC$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  lên các đường thẳng  $BC, CA$ . Đường thẳng  $IJ$  cắt  $AB$  tại  $K$ .

- Chứng minh bốn điểm  $B, K, M, I$  cùng thuộc một đường tròn. Từ đó suy ra  $MK \perp AB$ .
- Gọi  $M_1, M_2, M_3$  lần lượt là các điểm đối xứng của  $M$  qua các đường thẳng  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng bốn điểm  $M_1, M_2, M_3$  và  $H$  cùng thuộc một đường thẳng.
- Chứng minh khi điểm  $M$  di động trên cung nhỏ  $BC$  ta luôn có  $M_2M_3 \leq 4R \cdot \sin \widehat{BAC}$ . Xác định vị trí của điểm  $M$  khi dấu bằng xảy ra.

**Câu 6.**

- Giải phương trình nghiệm nguyên  $x^2 - 6y^2 + xy + 2y - x - 7 = 0$ .
- Cho  $x, y$  nguyên và thỏa mãn  $x^2 - 2021y^2 + 2022$  chia hết cho  $xy$ . Chứng minh rằng  $x, y$  là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

**Câu 7.**

- Cho các số thực dương  $a, b$  thỏa mãn  $a + b = 2$ . Chứng minh rằng  $\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} \geq 1$ .
- Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $\sqrt{ab + a + b + 1} + c = 6$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{2a+1}{a+1} + \frac{2b+1}{b+1} + \frac{2c+2}{c+2}$ .

# BÀI 12. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH BÌNH THUẬN

**Câu 1.** Giải phương trình:  $6\sqrt{2x+5} + 4\sqrt{x+2} = 3x + 20$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Hai bạn An và Bình đang so về số lượng những viên bi mà hai bạn hiện có. An nói với Bình rằng: “Nếu bạn cho tôi một số viên bi từ túi của bạn thì tôi sẽ có số viên bi gấp 6 lần số viên bi của bạn. Còn nếu tôi cho bạn số viên bi như thế, số viên bi của bạn sẽ bằng  $\frac{1}{3}$  số viên bi của tôi”. Hỏi số viên bi ít nhất mà bạn An có thể có là bao nhiêu?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.**

- a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình  $x^4 + x^2 - y^2 - y + 4 = 0$ .
- b) Cho ba số nguyên dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 = c^2$ . Chứng minh rằng  $abc \vdots 60$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 4.** Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c \leq 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2024}{ab + bc + ca}.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....  
.....  
.....

**Câu 5.** Cho đường tròn tâm  $O$  nội tiếp tam giác  $ABC$ , tiếp xúc với các cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $D$  và  $E$ . Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ADE$ .

- a) Chứng minh  $A, I, O$  thẳng hàng và  $I$  thuộc đường tròn  $(O)$ .
- b) Các phân giác trong của các góc  $B$  và  $C$  cắt đường thẳng  $DE$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh tứ giác  $BCMN$  nội tiếp và tam giác  $BMC$  vuông.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Câu 6.** Người ta viết các số nguyên  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  lên các đỉnh của một bát giác lồi sao cho tổng các số ở mỗi ba đỉnh liên tiếp không nhỏ hơn  $k$ , với  $k$  nguyên dương. Tìm giá trị lớn nhất của  $k$ .

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

TRƯỜNG THPT CHUYÊN  
LÊ QUÝ ĐÔN  
— Hết —  
NHỊNH THUẬN

# BÀI 13. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH CẦN THƠ

**Câu 1.** (1,5 điểm) Cho biểu thức:

$$Q = \left( \frac{10 - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - x - \sqrt{x} + 1} + \frac{6}{x-1} \right) : \frac{4\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 1} \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

- a) Rút gọn biểu thức  $Q$ .
- b) Đặt  $P = Q \cdot (x - \sqrt{x} + 1)$ . Chứng minh rằng  $P > 1$ .

**Câu 2.** (1,5 điểm) Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho Parabol  $(P): y = \frac{1}{2}x^2$  và đường thẳng  $(d): y = (m+2)x - m + 2$ . Tìm tất cả giá trị tham số  $m$  sao cho đường thẳng  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm, phân biệt  $A(x_1; y_1)$  và  $B(x_2; y_2)$  nằm cùng bên phải trục tung.

**Câu 3.** (2,0 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau trên tập số thực:

- a)  $x^2 + 1 = 2x + \sqrt{3x - 1}$ .
- b) 
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy - x + y = 0 \\ x^2 - 2x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

**Câu 4.**

- a) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x; y)$  thoả mãn

$$x^2 + 20y^2 + 65 + 2x(1 + y) = 2y(30 - x).$$

b) Hưởng ứng phong trào "Xanh hoá trường học", lớp 9A và lớp 9B được nhà trường giao chỉ tiêu trồng 80 cây xanh xung quanh sân vườn của trường. Nếu lớp 9A trồng trong 2 giờ và lớp 9B trồng trong 1 giờ thì được 25 cây. Nếu lớp 9A trồng trong 1 giờ và lớp 9B trồng trong 2 giờ thì được 23 cây. Hỏi nếu cả hai lớp cùng trồng với nhau thì sau bao lâu hoàn thành chỉ tiêu được giao? Biết rằng, mỗi giờ số cây trồng được của mỗi lớp là không đổi.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 5.** (2,0 điểm) Cho tam giác  $ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ). Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Dựng bên ngoài tam giác  $ABC$  các tam giác đều  $ANI$  và  $BMK$ , Gọi điểm  $D$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  lên cạnh  $BC$ , điểm  $E$  là trung điểm của đoạn thẳng  $IK$ .

- a) Chứng minh tứ giác  $AKBD$  nội tiếp.
- b) Chứng minh điểm  $E$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $IKD$ .
- c) Tính số đo của  $\widehat{NEM}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 6.** (1,0 điểm) Cho  $x, y, z$  là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{3x+z}{y+z} + \frac{4y}{x+z} + \frac{3z+z}{x+y} \geq 6.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

# BÀI 14. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH ĐAKNONG

**Câu 1.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2x}{\sqrt{x}+1}$  với  $x > 0$  và  $x \neq 1$ .

- Rút gọn biểu thức  $P$ .
- Tính giá trị của biểu thức  $P$  với  $x = 3 - 2\sqrt{2}$ .
- Tìm  $x$  để  $P > 3$ .

**Câu 2.**

a) Giải phương trình:  $(x-9)(x-6)(x-4)(x-1) = -56$ .

b) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy - 9x - 9y + 9 = 0 \\ x^2 + 2y + 2\sqrt{x^2 + 2y + 2} - 1 = 0 \end{cases}$$

**Câu 3.**

a) Cho phương trình bậc hai:  $x^2 - 2(3m+1)x + 3(m^2+2) = 0$  (\*) với  $m$  là tham số. Tìm  $m$  để phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và  $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 4$ .

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên  $(x; y)$  của phương trình:  $2x^2 + y^2 - 3xy - x - y - 13 = 0$ .

**Câu 4.** Trên bảng đang có hai số 1 và 2. Thực hiện ghi thêm số lên bảng theo quy tắc sau: Mỗi lần viết lên bảng một số  $c = ab + a + b$  với hai số  $a$  và  $b$  đã có trên bảng. Hỏi với cách viết thêm số như trên sau một số lần hữu hạn có thể viết được số 2022 lên bảng không?



**Câu 5.** Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$ . Từ  $M$  kẻ 2 tiếp tuyến  $MA, MB$  đến  $(O)$  ( $A, B$  là tiếp tuyến). Kẻ cát tuyến  $MNP$  ( $MN < MP$ ).  $K$  là trung điểm của  $NP$ .

- Chứng minh các điểm  $A, K, O, B$  cùng thuộc một đường tròn và xác định tâm của đường tròn đó.
- $BA$  cắt  $OK$  tại  $E$  và  $MP$  cắt  $AB$  tại  $F$ . Chứng minh  $KF$  là phân giác trong của  $\widehat{AKB}$ , từ đó suy ra  $EA \cdot FB = EB \cdot FA$ .
- Chứng minh khi cát tuyến  $MNP$  thay đổi thì trọng tâm tam giác  $ANP$  luôn thuộc một đường tròn cố định.

**Câu 6.** Cho ba số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z = 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{\sqrt{15x^2 + 26xy + 8y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{15y^2 + 26yz + 8z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{15z^2 + 26zx + 8x^2}}$$

# BÀI 15. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH QUẢNG NINH

**Câu 1.** Cho các số hữu tỉ  $x, y$  thỏa mãn  $(3x - 2)(3y - 2) = 1$ . Chứng minh  $A = \sqrt{x^2 - xy + y^2}$  là số hữu tỉ.

**Câu 2.** Giải phương trình  $6x^2 - 5x + 1 = x\sqrt{5x - 1}$ .

**Câu 3.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + x = 6 \\ \frac{y^2}{x} + y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

**Câu 4.**

a) Chứng minh rằng với  $x$  là số nguyên bất kỳ thì  $25x + 1$  không thể viết được dưới dạng tích hai số nguyên liên tiếp.

b) Tìm tất cả các số thực  $x$  sao cho  $\left\{ \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 1} \right\} = \frac{1}{2}$ , trong đó kí hiệu  $\{a\} = a - [a]$  với  $[a]$  là số nguyên lớn nhất không vượt quá  $a$ .

**Câu 5.** Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y \leq z$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (2x^2 + 2y^2 + z^2) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2z^2} \right).$$

**Câu 6.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn, đường cao  $AH$ . Đường tròn  $(O)$  đường kính  $BC$  cắt  $AB$  tại  $E$  ( $E$  khác  $B$ ). Gọi  $D$  là một điểm trên cung nhỏ  $BE$  ( $D$  khác  $B, D$  khác  $E$ ). Hai đường thẳng  $DC$  và  $AH$  cắt nhau tại  $G$ , đường thẳng  $EG$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $M$  ( $M$  khác  $E$ ), hai đường thẳng  $AH$  và  $BM$  cắt nhau tại  $I$ , đường thẳng  $CI$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $P$  ( $P$  khác  $C$ ).

- Chứng minh tứ giác  $DGIP$  nội tiếp;
- Chứng minh  $GA \cdot GI = GE \cdot GM$ ;
- Hai đường thẳng  $AD$  và  $BC$  cắt nhau tại  $N$ ,  $DB$  và  $CP$  cắt nhau tại  $K$ . Chứng minh hai đường thẳng  $NK$  và  $AH$  song song với nhau.

**Câu 7.** Chứng minh rằng trong 16 số nguyên dương đôi một khác nhau nhỏ hơn 23, bao giờ cũng tìm được hai số khác nhau có tích là số chính phương.

# BÀI 16. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH HẢI PHÒNG

## Câu 1.

- a) Rút gọn biểu thức:  $A = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$
- b) Tìm  $m$  để các đường thẳng:  $y = 2x + 4$  ( $d$ );  $y = 3x + 5$  ( $d'$ );  $y = -2mx + m - 3$  ( $\Delta$ ) cùng đi qua một điểm.
- c) Cho phương trình:  $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm dương.

## Câu 2.

- a) Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn:  $xy + 2x + y - 1 = 0$
- b) Một cửa hàng điện máy thực hiện chương trình khuyến mãi giảm giá tất cả các mặt hàng 10% theo giá niêm yết, và nếu hóa đơn khách hàng trên 10 triệu sẽ được giảm thêm 2% số tiền trên hóa đơn, hóa đơn trên 15 triệu sẽ được giảm thêm 4% số tiền trên hóa đơn, hóa đơn trên 40 triệu sẽ được giảm thêm 8% số tiền trên hóa đơn. Ông An muốn mua một tivi với giá niêm yết là 9 200 000 đồng và một tủ lạnh với giá niêm yết là 7 100 000 đồng. Hỏi với chương trình khuyến mãi của cửa hàng, ông An phải trả bao nhiêu tiền?
- c) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2x^2 - 6y^2 = xy \\ 3x^2 + 2y = xy + x. \end{cases}$$

**Câu 3.** Cho tam giác ABC vuông tại B ( $BC > AB$ ) nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính  $AC = 2R$ . Kẻ dây cung BD vuông góc với AC, H là giao điểm của AC và BD. Trên HC lấy điểm E sao cho E đối xứng với A qua H. Đường tròn tâm O' đường kính EC cắt đoạn BC tại I (I khác C).

- a) Chứng minh rằng:  $CI \cdot CA = CE \cdot CB$ .
- b) Chứng minh rằng: Ba điểm D, I, E thẳng hàng.
- c) Chứng minh rằng: HI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính EC.
- d) Khi B thay đổi thì H thay đổi, xác định vị trí của H trên AC để diện tích tam giác O'IH lớn nhất.

**Câu 4.**

a) Tìm tất cả các cặp số thực  $x, y$  dương thỏa mãn điều kiện:

$$\sqrt{22x^2 + 36xy + 6y^2} + \sqrt{6x^2 + 36xy + 22y^2} = x^2 + y^2 + 32$$

b) Cho  $a, b$  là các số thực thỏa mãn:  $a^2 + b^2 = a + b$ . Chứng minh rằng:  $a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 \leq 4$



# BÀI 17. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH BÌNH DƯƠNG

**Câu 1.** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right) - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a}$  với  $a, b$  là các số thực dương khác nhau.

- Rút gọn  $A$ .
- Tính giá trị biểu thức

$$B = \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right) \text{ khi } a = 7 - 4\sqrt{3} \text{ và } b = 7 + 4\sqrt{3}.$$

**Câu 2.** Cho phương trình  $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$  ( $m$  là tham số).

- Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt dương.
- Gọi  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình. Tìm  $m$  để biểu thức  $M = \frac{-2022}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 3.**

- Giải phương trình  $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1$  với  $x \in \mathbb{R}$ .
- Chứng minh  $a^7 - a$  chia hết cho 7 với mọi  $a \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 4.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ ;  $BE, CF$  là các đường cao ( $E, F$  là các chân đường cao). Các tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  tại  $B, C$  cắt nhau tại  $S$ . Gọi  $N, P$  lần lượt là giao điểm của  $BS$  với  $EF$ ,  $AS$  với  $(O)$  ( $P$  khác  $A$ ). Chứng minh rằng

a)  $MN \perp BF$ .

b)  $AB \cdot CP = AC \cdot BP$ .

c)  $\widehat{CAM} = \widehat{BAP}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## BÀI 18. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH KIÊN GIANG

**Câu 1.** Cho biểu thức  $A = \frac{1 - 3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x} - 1} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x} - 4x}$ .

a) Rút gọn biểu thức  $A$ .

b) Tính giá trị biểu thức  $A$  tại  $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{1 + \sqrt{5}}$ .

**Câu 2.** Cho phương trình  $2x^2 - 5x + 1 = 0$ .

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho có nghiệm.

b) Giả sử  $x_0$  là một nghiệm của phương trình đã cho. Hãy tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{x_0^2}{4x_0^4 + 1}$ .

**Câu 3.** Giải phương trình  $\sqrt{2x^2 - x - 3} + \sqrt{2x - 3} - x\sqrt{x + 1} = x - 2(\sqrt{x + 1} + 1)$ .

**Câu 4.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2y^3 + xy^2 - 6y - 3x = 2 \\ y^2 - 2y - x = 2. \end{cases}$$



**Câu 5.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB < AC$ . Trên cạnh  $AC$ , lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = AB$ . Gọi  $H, F$  tương ứng là hình chiếu của  $A, E$  trên  $BC$ . Biết  $BH = 3$  và  $EF = 1$ ; hãy tính độ dài các cạnh của  $\triangle ABC$ .

**Câu 6.** Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ .

- Trên nửa đường tròn đã cho, lấy hai điểm phân biệt  $M, N$  sao cho cả  $M$  và  $N$  đều không trùng với  $A, B$  và  $N$  nằm trên cung  $AM$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AM$  và  $BN$ ; và gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  trên  $AB$ . Chứng minh rằng  $HI$  là phân giác trong của góc  $NHM$ .
- $X$  là một điểm di động trên nửa cung tròn đã cho, sao cho  $X$  không trùng với  $A, B$ . Qua  $A$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $AB$ , cắt  $BX$  tại  $C$ . Gọi  $D$  là giao điểm của phân giác trong của góc  $ABX$  và nửa đường tròn đã cho. Hãy xác định vị trí của điểm  $X$  sao cho  $DB = DC$ .

**Câu 7.** Cho  $a, b, c$  là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu  $a^2 + b^2 + c^2$  chia hết cho 6 thì  $a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}$  cũng chia hết cho 6.

**Câu 8.** Cho một dãy gồm 2023 ô vuông bằng nhau, được xếp liên tiếp nhau thành một hàng ngang. Người ta điền vào mỗi ô vuông một số ô vuông không lớn hơn 4, sao tích của ba số được điền ở bất kì ba ô vuông liên tiếp nào cũng bằng 24. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số như vậy?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## BÀI 19. TS CHUYÊN TOÁN - KHTN - V2

**Câu 1.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \right) = \sqrt{\frac{abc}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}}.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 6 \\ 3x + 2y + 1 = 2\sqrt{2x + y + 6}. \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  $(x, y)$  thỏa mãn

$$(x + y)(5x + y)^3 + xy^3 = (5x + y)^3 + x^2y^3 + xy^4.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 4.** Xét các số thực dương  $a, b, c$  thay đổi thỏa mãn đồng thời các điều kiện  $c \leq b < a \leq 3$ ,  $b^2 + 2a \leq 10$ ,  $b^2 + 2a + 2c \leq 14$  và  $(a^2 + 1)(b^2 + 1) + 4ab \leq 2(a^3 + b^3 + a + b)$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 4a^2 + b^4 + 2b^2 + 4c^2.$$

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn  $(O)$ . Điểm  $P$  nằm trong tam giác  $ABC$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm  $P$  trên các cạnh  $CA, AB$ . Giả sử tứ giác  $BCEF$  nội tiếp trong đường tròn  $(K)$ .

- Chứng minh rằng  $AP$  vuông góc với  $BC$ .
- Chứng minh rằng  $AP = 2OK$ .
- Đường thẳng qua điểm  $P$  vuông góc với đường thẳng  $AP$  cắt đường tròn  $(O)$  tại hai điểm  $Q$  và  $R$ . Chứng minh rằng đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AP$  tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác  $KQR$ .

**Câu 6.** Cho các điểm  $A_1, A_2, \dots, A_{30}$  theo thứ tự nằm trên một đường thẳng sao cho độ dài các đoạn thẳng  $A_k A_{k+1}$  bằng  $k$  (đơn vị dài), với  $k = 1, 2, \dots, 29$ . Ta tô màu mỗi đoạn thẳng  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{29} A_{30}$  bởi một trong ba màu cho trước (mỗi đoạn thẳng được tô bởi đúng một màu). Chứng minh rằng với mọi cách tô màu, ta luôn chọn được hai số nguyên dương  $1 \leq j < i \leq 29$  sao cho hai đoạn thẳng  $A_i A_{i+1}, A_j A_{j+1}$  được tô cùng màu và  $i - j$  là bình phương của một số nguyên dương.

## BÀI 20. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH LÂM ĐỒNG

### Câu 1. (4.0 điểm)

- a) Cho biểu thức  $A = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$ . Hãy biểu diễn  $A$  dưới dạng tổng của ba căn thức bậc hai.
- b) Trong kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2022 - 2023, số thí sinh đăng ký dự thi vào trường THPT chuyên  $A$  nhiều gấp rưỡi số thí sinh đăng ký dự thi vào trường THPT chuyên  $B$ . Biết rằng tổng số phòng thi của cả hai trường là 50 phòng thi và mỗi phòng thi có đúng 24 thí sinh. Tính số thí sinh đăng ký dự thi vào mỗi trường.

### Câu 2. (4.0 điểm)

- a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n$  thì  $2023n^3 - n$  chia hết cho 6.
- b) Bạn Thanh mua một số quyển vở và một số cây bút hết tất cả là 263 nghìn đồng. Biết giá mỗi quyển vở là 13 nghìn đồng, giá mỗi cây bút là 12 nghìn đồng. Hỏi bạn Thanh mua được bao nhiêu quyển vở và bao nhiêu cây bút?

### Câu 3. (4.0 điểm)

- a) Cho tam giác  $ABC$  nhọn có  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ , hai đường cao  $AH$  và  $CK$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ , biết diện tích tứ giác  $AKHC$  bằng  $30\text{cm}^2$ .
- b) Cho phương trình  $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$  ( $x$  là ẩn,  $m$  là tham số). Tìm các giá trị nguyên của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa  $2018 < x_1 < x_2 < 2023$ .

**Câu 4. (4.0 điểm)**

- a) Giải phương trình  $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) - 3 = 0$ .
- b) Cho một tấm bìa hình chữ nhật có hai kích thước là 50cm và 80cm. Một người muốn làm một chiếc hộp đựng quà bằng cách cắt bốn góc của tấm bìa bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh  $x$  (cm), rồi gập lại để được một chiếc hộp không nắp. Tìm độ dài  $x$  để chiếc hộp thu được có thể tích lớn nhất.

**Câu 5. (4.0 điểm)**

- a) Cho  $a, b, c$  là các số dương thỏa mãn điều kiện  $a + b + c = 3$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{2a + b + c} + \frac{b}{a + 2b + c} + \frac{c}{a + b + 2c}.$$

- b) Cho tam giác  $ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $O$  có trực tâm là điểm  $H$ . Gọi  $M$  là điểm trên cung nhỏ  $BC$  ( $M$  khác  $B, C$ ). Gọi  $N, P$  theo thứ tự là các điểm đối xứng của  $M$  qua các đường thẳng  $AB, AC$ . Chứng minh ba điểm  $N, H, P$  thẳng hàng.

## BÀI 21. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH THANH HÓA

**Câu 1.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{1}{x+2\sqrt{x}+1} + 1$  (với  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$ ).

- Rút gọn biểu thức  $P$ .
- Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $P < 2$ .

**Câu 2.** Cho hai điểm  $M, N$  thuộc đồ thị hàm số  $y = -\frac{1}{2}x^2$  và có hoành độ lần lượt là  $x_M = -2$ ;  $x_N = 1$ . Xác định  $a, b$  để đường thẳng  $(d): y = ax + b$  đi qua hai điểm  $M, N$ .

**Câu 3.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{2}{x+1} - \frac{3}{y-4} = -5 \\ \frac{4}{x+1} + \frac{5}{y-4} = 23. \end{cases}$$

**Câu 4.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 2m + 4 = 0$  ( $m$  là tham số).

- Giải phương trình khi  $m = 2$ .
- Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa  $|x_1| - |x_2| = 6$ .

**Câu 5.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC$  và  $AC$ . Đường thẳng  $MN$  cắt cung nhỏ  $BC$  của đường tròn  $(O)$  tại  $P$ .

- Chứng minh tứ giác  $OMCN$  nội tiếp.
- Gọi  $D$  là điểm bất kỳ trên cạnh  $AB$  ( $D$  khác  $A, B$ ). Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BPD$  cắt cạnh  $BC$  tại điểm  $I$  khác  $B$ ;  $K$  là giao điểm của hai đường thẳng  $DI$  và  $AC$ . Chứng minh  $PK \cdot PB = PC \cdot PD$ .
- Gọi  $G$  là giao điểm khác  $P$  của  $AP$  với đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BPD$ , đường thẳng  $IG$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Chứng minh rằng khi  $D$  di chuyển trên cạnh  $AB$  thì tỉ số  $\frac{AD}{AE}$  không đổi.

**Câu 6.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương thỏa mãn  $a + b + c = abc$ . Chứng minh rằng

$$\frac{b}{a\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{b\sqrt{c^2+1}} + \frac{a}{c\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{3}{2}.$$



## BÀI 22. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH NAM ĐỊNH

**Câu 1.** Cho  $f(x) = 2x^2 - 2x - 7$  có 2 nghiệm phân biệt là  $x_1, x_2$ . Đặt  $g(x) = x^2 - 1$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = g(x_1) \cdot g(x_2)$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Cho các số thực  $a, b, c$  bất kì thoả mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 2022$ . Chứng minh rằng

$$(2a + 2b - c)^2 + (2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2 = 18198.$$

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Giải phương trình  $x^2 + \sqrt{(x+1)^3} = 3x + 4$ .

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 4.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (\sqrt{y+7})^3 + 4(2x-y) = 2(x+4)\sqrt{y+7} - 4 \\ 2\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y-14} = x+4. \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 5.** Cho đường tròn  $(O, R)$  và điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn. Từ điểm  $M$  kẻ hai tiếp tuyến  $MA, MB$  với đường tròn  $(O)$  ( $A, B$  là các tiếp điểm). Gọi  $D$  là điểm trên cung lớn  $AB$  của đường tròn  $(O, R)$  sao cho  $AD \parallel MB$  và  $C$  là giao điểm thứ hai của đường thẳng  $MD$  với đường tròn  $(O, R)$ .

- Gọi  $H$  là giao điểm của các đường thẳng  $OM$  và  $AB$ . Chứng minh rằng  $MH \cdot MO = MC \cdot MD$  và tứ giác  $OHCD$  nội tiếp.
- Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $MAB$ . Chứng minh rằng ba điểm  $A, C, G$  thẳng hàng.
- Giả sử  $OM = 3R$ . Kẻ đường kính  $BK$  của đường tròn  $(O, R)$ . Gọi  $I$  là giao điểm của các đường thẳng  $MK$  và  $AB$ . Tính giá trị biểu thức  $T = 8 \frac{IM^2 + IA^2}{IK^2 + IH^2} + 5 \frac{IA}{AB}$ .

### Câu 6.

- Chứng minh rằng  $P(n) = n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120$  chia hết cho 24 với mọi số tự nhiên  $n$ .
- Cho  $p$  là số nguyên tố có dạng  $4k + 3$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ). Chứng minh rằng nếu  $a, b \in \mathbb{Z}$  thỏa mãn  $a^2 + b^2$  chia hết cho  $p$  thì  $a:p$  và  $b:p$ . Từ đó suy ra phương trình  $x^2 + 4x + 9y^2 = 58$  không có nghiệm nguyên.

**Câu 7.** Xét các số thực không âm  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z \geq 6$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{x^2}{yz + \sqrt{1+x^3}} + \frac{y^2}{zx + \sqrt{1+y^3}} + \frac{z^2}{xy + \sqrt{1+z^3}}$ .

**Câu 8.** Từ 2022 số nguyên dương đầu tiên là  $1, 2, 3, \dots, 2022$ , người ta chọn ra  $n$  số phân biệt sao cho cứ hai số bất kì được chọn ra đều có hiệu không là ước của tổng hai số đó. Chứng minh rằng  $n \leq 674$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



# BÀI 23. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH VŨNG TÀU

## Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức

$$P = \left[ \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} - \frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)^2} \right] : \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{(1 - x)^2},$$

với  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$ .

b) Giải phương trình  $x^2 - 3x + 2 - (x - 1)\sqrt{2x - 5} = 0$ .

c) Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + 4xy + x - 2 = 0 \\ 4y^2 + x + 4y - 1 = 0. \end{cases}$

## Câu 2.

a) Cho các số thực  $a, b, c, d$  thỏa mãn  $\frac{ac}{b+d} \geq 2$ . Chứng minh phương trình sau luôn có nghiệm

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0.$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn  $(x + y)(2x + 3y)^2 + 2x + y + 2 = 0$ .

**Câu 3.** Với các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $2(x^2 + y^2 + z^2) = 3y(x + z)$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \sqrt{2(x + y + z)} - (x^2 + z^2)$ .

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn  $AB < AC$  nội tiếp đường tròn  $O$  và có ba đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AH$  và  $BC$ .

a) Chứng minh rằng  $IJ$  vuông góc với  $EF$  và  $IJ$  song song với  $OA$ .

b) Gọi  $K, Q$  lần lượt là giao điểm của  $EF$  với  $BC$  và  $AD$ . Chứng minh  $\frac{QE}{QF} = \frac{KE}{KF}$ .

c) Đường thẳng chứa tia phân giác của  $\widehat{FHB}$  cắt  $AB, AC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Tia phân giác của  $\widehat{CAB}$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMN$  tại điểm  $P$  khác  $A$ . Chứng minh ba điểm  $H, P, J$  thẳng hàng.

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  cố định có diện tích  $S$ . Đường tròn  $d$  thay đổi đi qua trọng tâm của tam giác  $ABC$  cắt các cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $M, N$ . Gọi  $S_1, S_2$  lần lượt là diện tích các tam giác  $ABN$  và  $ACM$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $S_1 + S_2$ .

## BÀI 24. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH NAM ĐỊNH

**Câu 1.** Tìm điều kiện xác định của biểu thức  $A = \frac{2x - 1}{\sqrt{3x - 1} + 2}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Tìm tọa độ điểm  $M$  là giao điểm của đường thẳng  $y = 2x + 4$  với trục  $Ox$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Biết hình tròn có chu vi là  $8\pi$  cm. Tính diện tích hình tròn đó.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 4.** Cho hình trụ có chiều cao bằng 4 cm, diện tích một đáy bằng  $36\pi$  cm<sup>2</sup>. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đó.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 5.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{3 - \sqrt{x}}{1 - x} - \frac{\sqrt{x} + 3}{x + 2\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{4}{x^2 - 2x + 1}$  (với  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$ ).

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

b) Tìm  $x$  sao cho  $P + 6 = 0$ .

**Câu 6.** Cho phương trình  $x^2 - (m + 2)x + m + 1 = 0$  (1) (với  $m$  là tham số).

- a) Tìm  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.
- b) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để  $x_1, x_2$  là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

**Câu 7.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x + y + 2\sqrt{y(2x - 1)} = 10 \\ y - \sqrt{y} + \sqrt{2x - 1} = 6. \end{cases}$$

**Câu 8.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Tiếp tuyến tại  $A$  của  $(O)$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $M$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ ,  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $OM$ , giao điểm của  $AD$  và  $OM$  là  $H$ .

- a) Chứng minh tứ giác  $MAOI$  nội tiếp và  $MD^2 = MB \cdot MC$ .
- b) Giả sử tiếp tuyến tại  $B$  của đường tròn  $(O)$  cắt  $OI$  tại  $F$ . Chứng minh  $MD$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  và ba điểm  $A, D, F$  thẳng hàng.
- c) Kẻ đường kính  $DK$  của đường tròn  $(O)$ . Gọi  $N$  là hình chiếu của  $A$  trên  $DK$ . Đường thẳng  $MK$  cắt  $AN$  tại  $E$ . Chứng minh  $E$  là trung điểm của  $AN$ .

**Câu 9.** Giải phương trình  $x^3 - 3x - 1 = 3x\sqrt{x}(\sqrt{1-x} - 1)^3$ .

**Câu 10.** Xét hai số thực  $x, y$  thay đổi luôn thỏa mãn điều kiện  $x + y \geq 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4\sqrt{2(x^4 + y^4)} + \frac{8}{x+y} + 1.$$

TRƯỜNG THPT CHUYÊN  
LÊ QUÝ ĐÔN  
NHỊNH THUẬN



## BÀI 25. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH QUẢNG TRỊ

**Câu 1.** Cho biểu thức  $P = (x - 1)^2 \left( \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)^2} \right)$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

- Rút gọn  $P$ .
- Tìm giá trị lớn nhất của  $P$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.**

- Giải phương trình  $2x^2 + x = 4(\sqrt{x-1})^3 + 6\sqrt{x-1}$ .
- Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 11x + 4 = 0$ . Hãy lập một phương trình bậc hai nhận hai số  $x_1\sqrt{x_2} + 2\sqrt{x_1}$  và  $x_2\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$  làm hai nghiệm.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.**

- Tìm tất cả các số nguyên tố  $p$  và  $q$  thỏa mãn  $p^2 - 2q^2 = 1$ .
- Ba cầu thủ của một đội bóng trò chuyện với nhau về số áo được in trên áo mỗi người, nội dung như sau:
  - ☑ An: Tôi nhận ra rằng các số trên áo của chúng ta đều là số nguyên tố có hai chữ số.
  - ☑ Bình: Tổng hai số trên áo của hai bạn là ngày sinh nhật của tôi đã trôi qua vào tháng này.
  - ☑ Chung: Thật thú vị! Tổng hai số trên áo của hai bạn là ngày sinh nhật của tôi sắp tới vào tháng này.
  - ☑ An: Và tổng hai số trên áo hai bạn là ngày hôm nay.

Hãy xác định số áo của An, Bình và Chung.

.....

.....

**Câu 4.**

- a) Cho biểu thức  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (với  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ). Đặt  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Chứng minh rằng, nếu  $\Delta \leq 0$  thì  $f(x) \geq 0$  với mọi số thực  $x$ .
- b) Chứng minh rằng với mọi số thực  $x, y, z$  ta có

$$3(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1) \geq 1 + xyz + x^2y^2z^2.$$

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $B$  có  $BD$  là đường cao ( $D \in AC$ ).  $M$  là điểm thuộc đường trung trực  $\Delta$  của đoạn thẳng  $CD$ . Đường tròn đường kính  $MA$  cắt đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AB$  tại  $E$  và  $F$ .

- a) Chứng minh  $AE^2 = AD \cdot AC$ .
- b) Chứng minh  $MC = ME$ .
- c) Khi  $M$  di động trên  $\Delta$ , chứng minh  $EF$  luôn đi qua một điểm cố định.

## BÀI 26. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH NINH BÌNH

**Câu 1.** Cho biểu thức

$$A = \left( \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} \right) : \left( \frac{x - 2}{x - \sqrt{x} - 2} - 1 \right)$$

với  $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$ .

- Rút gọn biểu thức  $A$ .
- Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 3 - 2\sqrt{2}$ .

**Câu 2.**

a) Giải phương trình  $x^2 - 3x + 2 + 2(2 - x)\sqrt{x - 1} = 0$ .

b) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 8x + 4y = -1 \\ x^2 + 7y^2 - 4xy + 6y = 6 \end{cases}$$

**Câu 3.**

a) Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x + 2y + 3z \leq 6$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2 + 4y^2 + 9z^2} + \frac{1}{49xy} + \frac{3}{49yz} + \frac{3}{98zx} \geq \frac{9}{49}$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương  $a$  và các số nguyên tố  $p$  sao cho  $a^2 = 7p^4 + 9$ .

**Câu 4.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn ( $O$ ). Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC$ . Đường thẳng  $MN$  cắt ( $O$ ) tại các điểm  $P, Q$  ( $P$  thuộc cung nhỏ  $AB$  và  $Q$  thuộc cung nhỏ  $AC$ ). Lấy điểm  $D$  trên cạnh  $BC$  ( $D$  khác  $B$  và  $C$ ). Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BDP$  cắt  $AB$  tại điểm  $I$  ( $I$  khác  $B$ ). Đường thẳng  $DI$  cắt  $AC$  tại  $K$ .

a) Chứng minh rằng tứ giác  $AIPK$  nội tiếp.

b) Chứng minh rằng  $\frac{PK}{PD} = \frac{QB}{QA}$ .

c) Đường thẳng  $CP$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BDP$  tại  $G$  ( $G$  khác  $P$ ). Đường thẳng  $IG$  cắt đường thẳng  $BC$  tại điểm  $E$ . Chứng minh rằng khi điểm  $D$  di chuyển trên cạnh  $BC$  thì tỉ số  $\frac{CD}{CE}$  không đổi.

**Câu 5.** Cho bảng ô vuông  $3 \times 3$  (gồm ba dòng và ba cột). Người ta ghi tất cả các số thuộc tập hợp  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$  vào các ô vuông của bảng, mỗi ô vuông ghi một số, sao cho tổng các số trong mỗi bảng ô vuông con cỡ  $2 \times 2$  đều bằng nhau.

a) Hãy chỉ ra một cách ghi các số vào bảng thỏa mãn yêu cầu.

b) Trong tất cả các cách ghi các số vào bảng thỏa mãn yêu cầu bài toán, tìm giá trị lớn nhất của tổng các số trong mỗi bảng vuông con cỡ  $2 \times 2$ .

## BÀI 27. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH HẢI DƯƠNG

**Câu 1.** So sánh biểu thức  $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}\right)$  với  $-\frac{5}{2}$ .

**Câu 2.** Tính giá trị của biểu thức  $B = \frac{4x^{2024}(x+1) - 2x^{2023} + 2x + 1}{2x^2 + 3x}$   
tại  $x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}}$ .

**Câu 3.** Giải phương trình:  $3x - 1 + \frac{x-1}{4x} = \sqrt{3x+1}$ .

**Câu 4.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x + y + xy = 8 \\ \frac{1}{x^2 + 2x} + \frac{1}{y^2 + 2y} = \frac{1}{4} \end{cases}$ .

**Câu 5.** Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn phương trình  $y^2 - 5y + 62 = (y - 2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x$ .

**Câu 6.** Cho đa thức  $P(x)$  với các hệ số nguyên thỏa mãn  $P(2021) \cdot P(2022) = 2023$ . Chứng minh rằng đa thức  $P(x) - 2024$  không có nghiệm nguyên.

**Câu 7.** Cho đường tròn  $(O)$  và dây cung  $AB$  không đi qua tâm  $O$ . Gọi  $M$  là điểm chính giữa của cung nhỏ  $AB$ ;  $D$  là một điểm thay đổi trên cung lớn  $AB$  ( $D$  khác  $A$  và  $B$ );  $DM$  cắt  $AB$  tại  $C$ .

a) Chứng minh rằng  $MB \cdot BD = MD \cdot BC$ .

b) Chứng minh rằng  $MB$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BCD$  và khi điểm  $D$  thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BCD$  nằm trên đường thẳng cố định.

**Câu 8.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AB = \sqrt{2}$ . Gọi  $R_1, R_2$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $ABC$  và  $ABD$ . Chứng minh rằng  $R_1 + R_2 \geq 2$ .

**Câu 9.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a^2 + 4b^2 + c = 6ab$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{a}{2b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{a^3+8b^3}{16c}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## BÀI 28. TS CHUYÊN TOÁN - PTNK - V2

**Câu 1.** Cho hai phương trình:  $x^2 - 2ax + 3a = 0$  (1) và  $x^2 - 4x + a = 0$  (2)

- Chứng minh ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.
- Giả sử hai phương trình đều có hai nghiệm phân biệt.  $T_1, T_2$  là tổng bình phương các nghiệm của (1) và (2). Chứng minh  $T_1 + 5T_2 > 68$

**Câu 2.** Cho các số dương  $a \geq b \geq c$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Chứng minh:

$$\sqrt{4 + (b + c)^2} \leq 2a + b + c \leq \sqrt{4 + 4a^2}$$

**Câu 3.** Cho phương trình:  $2^x + 5^y = k^2$  ( $x, y, k \in \mathbb{N}^*$ )

- Chứng minh phương trình trên vô nghiệm khi  $y$  là số chẵn.
- Tìm  $k$  để phương trình có nghiệm.

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H, D$  đối xứng với  $H$  qua  $A$ .  $I$  là trung điểm của  $CD$ , đường tròn  $(I)$  đường kính  $CD$  cắt  $AB$  tại  $E, F$  ( $E$  thuộc tia  $AB$ ).

- Chứng minh  $\angle ECD = \angle FCH$  và  $AE = AF$ .
- Chứng minh  $H$  là trực tâm của  $\triangle CEF$ .



- c)  $BH$  cắt  $AC$  tại  $K$ . Chứng minh  $EFKH$  nội tiếp và  $EF$  là tiếp tuyến chung của  $(CKE)$  và  $(CKF)$ .
- d) Chứng minh tiếp tuyến tại  $C$  của  $(I)$  và tiếp tuyến tại  $K$  của  $(KEF)$  cắt nhau trên đường thẳng  $AB$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 5.** Cho dãy số nguyên  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{21} \geq a_{22}$  thỏa mãn:

$|a_i| \leq 11$  và  $a_i \neq 0 \forall i = 1; 2; \dots; 22$

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{22} = 1$

- a) Chứng minh:  $a_1; a_2 > 0$
- b) Chứng minh có thể chọn  $k \geq 1$  số từ  $a_2; a_3; \dots; a_{22}$  để tổng  $S$  của chúng thỏa  $-10 \leq a_1 + S \leq 0$ .
- c) Chứng minh từ dãy đã cho có thể chọn  $n \geq 1$  số có tổng bằng 0.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TRƯỜNG THPT CHUYÊN  
LÊ QUÝ ĐÔN  
NHỊNH THUẬN

# BÀI 29. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH PHÚ YÊN

## Câu 1 (4,00 điểm).

a) Cho  $a, b, c$  là ba số khác 0 sao cho  $a + b + c = 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2.$$

b) Tính giá trị biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2}}.$$

Câu 2 (3,00 điểm). Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = x \\ y^2 + 2xy = y \end{cases}.$$

Câu 3 (3,00 điểm). Giải phương trình  $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = -x^2 + 8x - 14$ .

Câu 4 (3,00 điểm). Tìm  $m$  để phương trình  $x^2 - (m+1)x + m + 3 = 0$  ( $m$  là tham số) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  là độ dài hai cạnh  $AB, AC$  của tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có  $BC = 5$ .

**Câu 5 (4,00 điểm).** Cho ba đường thẳng cố định  $a, b, c$  song song nhau, sao cho  $b$  nằm giữa và cách đều  $a$  và  $c$ . Một đường thẳng  $d$  cố định, vuông góc với  $a$ , lần lượt cắt  $a, b, c$  tại  $A, B, C$ . Trên đoạn  $AB$  lấy điểm  $I$  sao cho  $IA = 2IB$ . Gọi  $D$  là một điểm di động trên  $c$ . Trên  $b$  lấy điểm  $E$  sao cho  $IE = \frac{1}{2}ID$ . Đường thẳng  $DE$  cắt  $a$  tại  $F$ .

a) Lấy điểm  $H$  trên đoạn  $ED$  sao cho  $HE = \frac{1}{2}HD$ . Chứng minh rằng  $\widehat{FIH} = 90^\circ$ .

b) Chứng minh rằng đường thẳng  $DE$  luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

**Câu 6 (3,00 điểm).** Cho các số nguyên dương  $x, y, z$  thoả  $(x + y)^4 + 5z = 63x$ . Tính giá trị biểu thức

$$Q = x + y + z.$$

# BÀI 30. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH NGHỆ AN

## Câu 1.

a) Giải phương trình  $\sqrt{x+1} + x^2 - x = \sqrt{x^2+1}$ .

b) Giải hệ phương trình  $\begin{cases} (2xy-1)^2 + 4x^2 = 5y^2 \\ 2x(x-y^2) = y^2 - y \end{cases}$ .

## Câu 2.

a) Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  thỏa mãn  $(x-y)^2(8-xy) + 4 = 12(x-y)$ .

b) Cho  $n$  là số nguyên dương. Chứng minh rằng  $2^n + 36$  và  $12^{2n} + 25$  không đồng thời là số chính phương.

**Câu 3.** Cho các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $1 \leq x, y, z \leq 3$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = 7x + y + z + 9y^2 + 2z^3 - 3xz - 26xyz.$$

**Câu 4.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn tâm  $(O)$ . Các đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ . Tia  $AH$  cắt  $(O)$  tại  $K$  ( $K$  khác  $A$ ), tia  $KO$  cắt  $(O)$  tại  $M$  ( $M$  khác  $K$ ) và tia  $MH$  cắt  $(O)$  tại  $P$  ( $P$  khác  $M$ ).

a) Chứng minh  $OD \parallel MH$  và 4 điểm  $A, O, D, P$  cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi  $Q$  là giao điểm của  $PA$  và  $EF$ . Chứng minh  $DQ \perp EF$ .

c) Tia  $PE$  và tia  $PF$  cắt đường tròn  $(O)$  lần lượt tại  $L$  và  $N$  ( $L, N$  khác  $P$ ). Chứng minh  $LC = NB$ .

**Câu 5.** Cho tập hợp  $A$  gồm 2022 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2022. Tìm một số tự nhiên  $n$  nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp con gồm  $n$  phần tử của  $A$  đều chứa 3 phần tử là các số đôi một nguyên tố cùng nhau.



## BÀI 31. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH QUẢNG BÌNH

**Câu 1.** Cho biểu thức  $P = \frac{3x + 5\sqrt{x} - 11}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2} - 1$  (với  $0 \leq x \neq 1$ )

- Rút gọn biểu thức  $P$
- Tìm  $x$  để  $P$  chia hết cho 3.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.**

- Cho phương trình  $x^2 - 2(m - 1)x - 3 = 0(1)$  (với  $m$  là tham số). Tìm tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + 2x_2 = 5$ .
- Giải phương trình  $\sqrt{x + 1} + \sqrt{3x - 5} = 4$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b + c - a} + \frac{b^2}{c + a - b} + \frac{c^2}{a + b - c} \geq a + b + c.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 4.** Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để  $n^5 + 1$  chia hết cho  $n^3 + 1$ .

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 5.** Từ điểm  $A$  ở bên ngoài đường tròn  $(O)$  kẻ hai tiếp tuyến  $AM, AN$  với  $(O)$  ( $M, N$  là các tiếp điểm). Gọi  $E$  là trung điểm của  $AN$ ,  $C$  là giao điểm của  $ME$  với  $(O)$  ( $C$  khác  $M$ ) và  $H$  là giao điểm của  $MN$  và  $AO$ .

- Chứng minh tứ giác  $HCEN$  nội tiếp.
- Gọi  $D$  là giao điểm của  $AC$  với  $(O)$  ( $D$  khác  $C$ ). Chứng minh tam giác  $MND$  là tam giác cân.
- Gọi  $I$  là giao điểm của  $NO$  với  $(O)$  ( $I$  khác  $N$ );  $K$  là giao điểm của  $MD$  và  $AI$ . Tính tỉ số  $\frac{KM}{KD}$ .



## BÀI 32. TS CHUYÊN TOÁN - SPHN - V1

**Câu 1.** Cho  $A = \left( \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \right) : \frac{1}{x - 1}$  ( $x \geq 0; x \neq 1$ ).

a) Rút gọn  $P$ .

b) Tìm các số nguyên  $x$  sao cho  $\frac{1}{A}$  là số nguyên dương.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### Câu 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , hãy viết phương trình đường thẳng  $(d): y = ax + b$  biết  $(d)$  đi qua  $A(2; -1)$  và song song với đường thẳng  $y = -3x + 1$ .

b) Một cửa hàng kinh doanh điện máy sau khi nhập về chiếc tivi, đã bán chiếc tivi đó; cửa hàng thu được lãi là 10% của giá nhập về. Giả sử cửa hàng tiếp tục nâng giá bán chiếc tivi đó thêm 5% của giá đã bán, nhưng bớt cho khách hàng 245000 đồng, khi đó cửa hàng sẽ thu được tiền lãi là 12% của giá nhập về. Tìm giá tiền khi nhập về của chiếc tivi đó.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$  đều nội tiếp  $(O)$ , điểm  $D$  thuộc cung  $AB$  nhỏ ( $D$  khác  $A, B$ ). Các tiếp tuyến tại  $B, C$  của  $(O)$  cắt  $AD$  theo thứ tự tại  $E, G$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $CE$  và  $BG$ .

a) Chứng minh rằng  $\triangle EBC \sim \triangle BCG$ .

b) Tính số đo góc  $BIC$ . Từ đó chỉ ra  $BIDE$  là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi  $DI \cap BC = K$ . Chứng minh rằng:  $BK^2 = KI \cdot KD$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



#### Câu 4.

a) Tìm các số thực  $x$  sao cho  $a = x + \sqrt{2}$  và  $b = x^3 + 5\sqrt{2}$  đồng thời là hai số hữu tỉ.

b) Biết rằng

- ☑ Phương trình bậc hai  $x^2 + a_1x + b_1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt là  $x_0$  và  $x_1$ .
- ☑ Phương trình bậc hai  $x^2 + a_2x + b_2 = 0$  có hai nghiệm phân biệt là  $x_0$  và  $x_2$ .
- ☑ ...
- ☑ Phương trình bậc hai  $x^2 + a_{2022}x + b_{2022} = 0$  có hai nghiệm phân biệt là  $x_0$  và  $x_{2022}$ .

Chứng minh rằng số thực  $\alpha = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2022}}{2022}$  là nghiệm của phương trình bậc hai

$$x^2 + \left(\frac{a_1 + \dots + a_{2022}}{2022}\right)x + \frac{b_1 + \dots + b_{2022}}{2022} = 0.$$



# BÀI 33. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH VĨNH PHÚC

## Câu 1.

- a) Giải phương trình  $(x^2 - x + 1)(x^2 + 4x + 1) = -4x^2$ .
- b) Giải phương trình  $\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} - 2\sqrt{15+2x-x^2} = -4$ .
- c) Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 3x = 14y \\ (x^2 + 3x)(x + y - 3) = 18y \end{cases}$ .

## Câu 2.

- a) Tìm tất cả các số nguyên tố  $p$  và  $q$  sao cho  $p^2 + 3pq + 4q^2$  là một số chính phương.
- b) Tìm tất cả các số nguyên tố  $p$  sao cho tồn tại các số tự nhiên  $x, y$  thoả mãn

$$x^3 + y^3 - 6xy = p - 8$$

**Câu 3.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thoả mãn điều kiện  $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 3$ . Chứng minh rằng

- a)  $a + b + c \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .
- b)  $\frac{2ab+3}{(a+b)^2} + \frac{2bc+3}{(b+c)^2} + \frac{2ca+3}{(c+a)^2} \geq 6$ .

**Câu 4.** Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  sao cho hai tia  $BA$  và  $CD$  cắt nhau tại điểm  $E$ , hai tia  $AD$  và  $BC$  cắt nhau tại điểm  $F$ . Gọi  $G, H$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BD$ . Đường phân giác của các góc  $\widehat{BEC}$  và  $\widehat{AFB}$  cắt nhau tại điểm  $K$ . Gọi  $L$  là hình chiếu vuông góc của  $K$  trên đường thẳng  $EF$ . Chứng minh rằng:

a)  $\widehat{DEF} + \widehat{DFE} = \widehat{EBF}$  và  $KL = \sqrt{LE \cdot LF}$ .

b)  $\widehat{GED} = \widehat{HEA}$  và  $EG \cdot FH = EH \cdot FG$ .

c)  $\frac{MB}{MC} + \frac{NB}{NA} = 2 \cdot \frac{KH}{KG}$ ; trong đó  $M$  là giao điểm của hai đường thẳng  $EK$  và  $BC$ ,  $N$  là giao điểm của hai đường thẳng  $FK$  và  $AB$ .

**Câu 5.** Thầy Hùng viết các số nguyên  $1, 2, 3, \dots, 2021, 2022$  lên bảng. Thầy Hùng xoá đi 1010 số bất kì trên bảng. Chứng minh rằng trong các số còn lại trên bảng luôn tìm được

a) 3 số có tổng các bình phương là hợp số.

b) 504 số có tổng các bình phương chia hết cho 4.

# BÀI 34. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH TIỀN GIANG

## Câu 1.

1) Rút gọn biểu thức

$$M = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{4}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{14+\sqrt{15}}} + \frac{1}{\sqrt{15+\sqrt{16}}};$$

$$N = \frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}}{(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{3+\sqrt{5}}}.$$

2) Giải phương trình  $(1 + 3x\sqrt{9x^2 + 1})(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x) = 1$ .

3) Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 2x^2 + xy + 1 = 4x \\ x^3 + x^2y + y = 3x. \end{cases}$

## Câu 2.

1) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P): y = ax^2$  qua  $M(\sqrt{3}; 3)$  và đường thẳng  $(d): y = -\frac{1}{2}x + m$  (với  $m$  là tham số). Xác định phương trình của parabol  $(P)$ , từ đó tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$  khác gốc tọa độ sao cho  $\frac{y_A}{x_B} + \frac{y_B}{x_A} = \frac{25}{16}$ .

2) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 + mx + 1 = 0$  và  $x_3, x_4$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 + nx + 1 = 0$ , với  $m, n$  là các tham số thỏa mãn  $|m| \geq 2, |n| \geq 2$ . Chứng minh rằng  $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = n^2 - m^2$ .

3) Cho hai số  $x, y$  liên hệ nhau bởi đẳng thức  $x^2 + 2y^2 - 2xy + 10(x - y) + 21 = 0$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = x - y + 2$ .

**Câu 3.** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $y = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$ .

**Câu 4.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn tâm  $O$ , có ba đường cao  $AD, BE, CF$  ( $D \in BC, E \in AC, F \in AB$ ) cắt nhau tại  $H$ . Tia  $AO$  cắt  $BC$  tại  $M$  và cắt  $(O)$  tại  $N$ , gọi  $P, Q$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  lên  $AB$  và  $AC$ . Chứng minh

- $DH$  là phân giác của  $\widehat{EDF}$ .
- $\frac{HE}{HF} = \frac{NB}{NC}$ .
- $HE \cdot MQ \cdot HB = HF \cdot MP \cdot NC$ .



## BÀI 35. TS CHUYÊN TOÁN - TỈNH LÀO CAI

### Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho biểu thức  $P = \left( \frac{6x}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \left( \frac{6\sqrt{x}-2}{9x\sqrt{x}-6x+\sqrt{x}} \right)$  với  $x > 0$ ,  $x \neq \frac{1}{9}$ ,  $x \neq 1$ .

1. Tìm tất cả các số nguyên  $x$  để  $P$  nhận giá trị nguyên.

b) Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $xy + yz + zx = 12$ . Chứng minh rằng

$$x\sqrt{\frac{(12+y^2)(12+z^2)}{12+x^2}} + y\sqrt{\frac{(12+x^2)(12+z^2)}{12+y^2}} + z\sqrt{\frac{(12+x^2)(12+y^2)}{12+z^2}} = 24.$$

**Câu 2 (0,5 điểm).** Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số. Lấy ngẫu nhiên 1 số từ tập  $S$ . Tính xác suất để số lấy được là số chính phương không vượt quá 2022.

### Câu 3 (2 điểm).

a) Theo kế hoạch, một công nhân phải làm 54 sản phẩm trong một khoảng thời gian dự định. Do yêu cầu đột xuất, người đó phải làm 68 sản phẩm nên mỗi giờ người đó đã làm tăng thêm 3 sản phẩm vì thế công việc hoàn thành sớm hơn so với thời gian dự định là 20 phút. Hỏi theo dự định, mỗi giờ người đó phải làm bao nhiêu sản phẩm, biết rằng mỗi giờ người đó làm được không quá 12 sản phẩm?

b) Cho phương trình  $x^2 - (m-1)x + m - 3 = 0$  (trong đó  $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 = 5x_1x_2 + 2\sqrt{2} - x_1x_2$ .

**Câu 4 (3,5 điểm).** Cho tam giác nhọn  $ABC$  không cân ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn ( $O$ ), ba đường cao  $AD, BE, CF$  ( $D \in BC, E \in AC, F \in AB$ ) của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại  $H$ . Gọi  $I, M$  lần lượt là trung điểm của  $AH$  và  $BC$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEF$  cắt đường tròn ( $O$ ) tại điểm  $K$  ( $K$  khác  $A$ ).

- Chứng minh rằng tứ giác  $DMEF$  nội tiếp.
- Chứng minh rằng tứ giác  $IOMK$  là hình thang cân.
- Chứng minh rằng  $KF \cdot HE = KE \cdot HF$ .
- Tiếp tuyến tại  $A$  và  $K$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEF$  cắt nhau tại  $T$ . Chứng minh rằng  $TM, AH, EF$  đồng quy.

**Câu 5 (1,0 điểm).**

- Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{3}{2}.$$

- Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = abc$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{a}{a+bc}} + \sqrt{\frac{b}{b+ca}} + \sqrt{\frac{c}{c+ab}}.$$

**Câu 6 (1,0 điểm).**

- Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n$  thì biểu thức  $P = n(13n + 1)(2n + 1)$  chia hết cho 6.
- Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $3x^2 + 2y^2 + x = 2(xy + y + 2)$ .

.....

.....

.....

